Concours EIA
Ecoles d'Ingénieurs Associées

Session de mai 2002

Epreuve de MATHEMATIQUES - durée : 3 heures

Attention
- aucun document autorisé.
- l'usage de la calculatrice est interdit.
- l'épreuve comporte un problème.

On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision de la rédaction.

Partie A

1. Soit f une fonction définie et continue sur $[0 ; +\infty[$ à valeur réelle. On définit les nombres réels I_n par : $I_0 = \int_0^1 f(t) \times dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 t^n \times f(t) \times dt$.

   a. Montrer que les intégrales I_n sont toutes définies.

   b. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$. On définit les nombres réels I_n comme dans la question précédente.

   a. Calculer I_0.

   b. Montrer que toutes les intégrales I_n sont convergentes.

   c. Sans calculer I_n, déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

   d. Calculer I_n puis retrouver le résultat précédent.

Partie B

Soit E l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x continues sur $[0 ; +\infty[$.
On considère les fonctions f_1 ; f_2 ; g_1 et g_2 définies par :

$$\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = x^2 \\ g_1(x) = x \ln(x) \\ g_2(x) = x^2 \ln(x) \end{cases}$$

1. Montrer que les deux fonctions g_1 et g_2 peuvent-être prolongées par continuité à l'intervalle [0 ; +∞[.
   Par la suite on notera g_1 et g_2 leurs prolongements respectifs à [0 ; +∞[.

2. Etudier la dérivabilité de ces fonctions g_1 et g_2 sur [0 ; +∞[.

3. a. Etudier les variations des fonctions f_1 ; f_2 ; g_1 et g_2.

   b. Etudier les positions relatives des courbes représentatives de ces fonctions, on présentera les résultats sous forme de tableau.

   c. Déterminer les équations des tangentes aux courbes représentatives de g_1 et g_2 au point d'abscisse 1.

4. Construire avec précision, dans un plan rapporté à un même repère, les courbes représentatives des fonctions f_1 ; f_2 ; g_1 et g_2.

Partie C (Sous espaces vectoriels de E)

On considère les ensembles E_1 et E_2 définis par :
$E_1 = \text{Vect}\{ f_1 ; g_1 \}$ et $E_2 = \text{Vect}\{ f_1 ; g_1 ; f_2 ; g_2 \}$.

1. Détermination d'une base de E_1 :

   a. Démontrer que (f_1 ; g_1) est une famille libre de E.

   b. En déduire une base de E_1 puis la dimension de E_1.

2. Détermination d'une base de E_2 :
   Soient α, β, γ et δ quatre nombres réels tels que : $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma g_1 + \delta g_2 = 0$.

   a. Montrer que cette égalité conduit à :

   $$\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{1\} \ ; \ \frac{\alpha}{x\ln(x)} + \frac{\beta}{\ln(x)} + \frac{\gamma}{x} + \delta = 0$$

   En déduire la valeur de δ.

   b. Démontrer que (f_1 ; g_1 ; f_2 ; g_2) est une famille libre de E.

   c. En déduire la dimension de E_2.

Partie D (Etude d'un endomorphisme de E_2)

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E \ ; \ \varphi(f) : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \int_0^1 f(xt) \times dt$$

1. Démontrer que φ est une application linéaire de E dans E.

2. Montrer que pour toute fonction élément de E, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f et $\varphi(f)$.

3. En déduire la résolution de l'équation différentielle $x \times y'(x) + y(x) = f(x)$ où y est une fonction de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et f un élément de E.

4. Matrice de φ

   a. Déterminer les images par φ des éléments de la base $(f_1 ; f_2 ; g_1 ; g_2)$ de E_2.
   Dans la suite du problème on notera φ la restriction de φ à E_2.

   b. En déduire la matrice A de φ dans cette base.

5. Soit f un élément de E_2, exprimer, en fonction des coordonnées de f dans la base $(f_1 ; f_2 ; g_1 ; g_2)$, les solutions de l'équation $x \times y'(x) + y(x) = f(x)$.

Partie E (Etude des composées φ^n de φ)

1. Montrer que φ est bijective,
puis déterminer la matrice de sa réciproque dans la base $(f_1 ; f_2 ; g_1 ; g_2)$ de E_2.

2. On définit : $\varphi^0 = Id_{E_2}$ et pour tout entier naturel n : $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$. Démontrer que

$$A^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & a_n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}$$

où a_n et b_n sont les termes de deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$a_0 = b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}.$$

3. a. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}; 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

   b. En déduire l'expression générale des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

4. a. Déterminer des coefficients α, β et γ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha b_{n+2} + \beta b_{n+1} + \gamma b_n = 0$.

   b. En déduire l'expression générale des termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Partie F (Etude du comportement de $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi^k$ quand n tend vers $+\infty$)

1. Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $h(x) = \sum_{k=1}^{n} k \times x^{k-1}$.

   a. Calculer $h(1)$.

   b. Démontrer que pour tout x réel, $\sum_{k=1}^{n} k \times x^{k-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=p}^{n-1} x^k$

   c. En déduire, pour tout x réel différent de 1, l'égalité suivante :
   $h(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

2. Déterminer la matrice B_n de $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi^k$ dans la base $(f_1 ; f_2 ; g_1 ; g_2)$ de E_2.

3. a. Déterminer la limite des suites définissant les coefficients de B_n. On notera B la matrice ainsi obtenue.

b. Montrer que B est inversible et déterminer sa matrice inverse B^{-1}.

c. Déterminer les valeurs propres de B puis les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. B est-elle diagonalisable ?